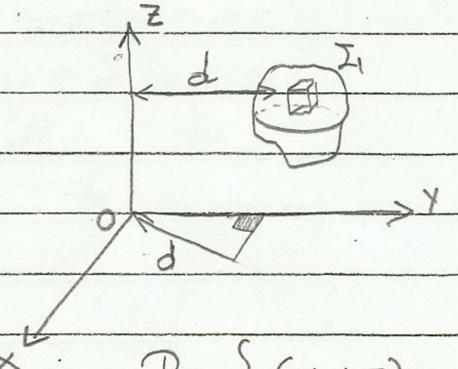
1) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα z και ως προς το επίπεδο Oxy του στερεού B, που αποκόπτει από τη σφαίρα $x^2+y^2+z^2=1$ ο κώνος $z=\sqrt{x^2+y^2}$, το οποίο έχει πυκνότητα $\rho(x,y,z)=z$.

ΛΥΣΗ

ροπή αδράνειας $= \rho \cdot d \cdot dv$ (στοιχειώδης όγκος), όπου d η απόσταση του Σ_1 από τον Oz

έτσι $d = x^2+y^2$

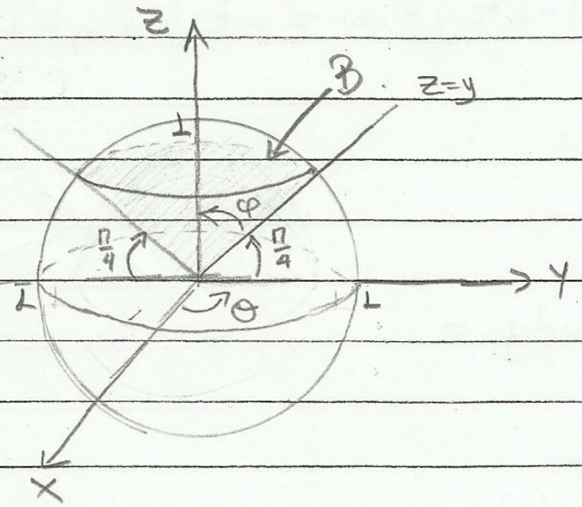


Άρα, η ζητούμενη ροπή αδράνειας δίνεται από:

$$I_z=\int_B (x^2+y^2)\,\rho(x,y,z)\,dv \quad (1)$$

$$I_{xoy}=\int_B z^2\cdot \rho(x,y,z)\,dv \quad (2)$$

$$B=\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1 \text{ και } z=\sqrt{x^2+y^2}\}$$



Θα κάνουμε χρήση σφαιρικών συντεταγμένων
- γεωγραφικό μήκος $\theta \in [0,2\pi]$
- γεωγραφικό πλάτος $\varphi \in [0,\pi]$

Ενώ, ισχύουν οι εξισώσεις:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta\cdot\sin\varphi \\ y &= r\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ y &= r\cdot\cos\varphi \end{aligned}\right\} g(r,\theta,\varphi)=\begin{pmatrix} r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta\cdot\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Από θεώρημα αλλαγής μεταβλητής $(\det Dg(r,\theta,\varphi)=r^2\cdot\sin\theta)$

Έχουμε στο παρακάτω ολοκλήρωμα, με B^* ισοδύναμο του B.

$$B^*=\left\{(r,\theta,\varphi): 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}\right\}$$

$$I_z=\int_B (x^2+y^2)\,z\,d(x,y,z)=\int_{B^*}(r^2\sin^2\varphi\cdot r\cos\varphi\cdot r^2\sin\varphi)\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\int_{B^*} r^5\cdot\sin^3\varphi\cdot\cos\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$ (Αφού B^* κανονικό ως προς r,θ,φ μπορώ να ολοκληρώσω με οποια σειρά θέλω)

$$=\frac{1}{6}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{48}.$$ όμοια και το $I_{xoy}=\int_B z^2\cdot z\,d(x,y,z)=$

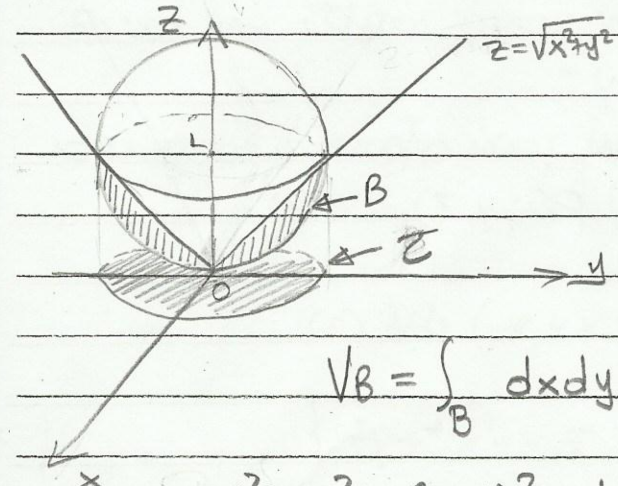
$$=\int_{B^*} r^3\cdot\cos^3\varphi\cdot r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta=\frac{\pi}{16}.$$

2) Να υπολογιστεί ο όγκος V του στερεού B, που βρίσκεται εντός της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=2z$ και εντός του κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

ΛΥΣΗ

$x^2+y^2+z^2-2z=0 \Rightarrow x^2+y^2+(z^2-2z+1)=1 \Rightarrow x^2+y^2+(z-1)^2=1$

σφαίρα με κέντρο $K(0,0,1)$ και ακτίνα $R=1$



$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1 \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases} \Rightarrow z^2+z^2=2z \Rightarrow$$

$\Rightarrow z=0$ ή $z=1$

$z=0$: xOy, $z=1$: $x^2+y^2=1$ (η σκιά)

$$V_B=\int_B dxdydz \quad (1)$$

$x^2+y^2+(z-1)^2=1 \Leftrightarrow (z-1)^2=1-x^2-y^2 \Leftrightarrow z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}+1$

Δηλαδή, το z οφείλεται:

$$1-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Άρα, (1) είναι:

$$V_B=\int_B dxdydz=\int_\tau\left(\int_{1-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz\right)dxdy=$$

$$=\int_\tau\left(\sqrt{x^2+y^2}-1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right)dxdy \quad (2)$$

όπου $\tau=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}$ μεταβαίνουμε σε ένα χωρίο τ^* ισοδύναμο του τ με πολικές συντεταγμένες.

Βεβαίως, αυτό με μία συνάρτηση $g(\rho,\theta)=\begin{pmatrix}\rho\cos\theta \\ \rho\sin\theta\end{pmatrix}$.

$\tau^*=\{(\rho,\theta): 0\leq\rho\leq 1$ και $0\leq\theta\leq 2\pi\}$

και $\det Dg(\rho,\theta)=\rho$.

(2) είναι:

$$\int_{\tau^*}\left(\sqrt{\rho^2}-1+\sqrt{1-\rho^2}\right)\rho\, d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^1\left(\rho^2-\rho+\rho\sqrt{1-\rho^2}\right)d\rho d\theta=$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{3}-2\pi\cdot\frac{1}{2}+2\pi.=\frac{\pi}{3}\text{ (κυβικές μονάδες)}$$